

ANUITAS *LAST SURVIVOR* UNTUK KASUS DUA DAN TIGA ORANG TERTANGGUNG

Devni Prima Sari¹, Jazwinarti²

Mathematical Department State University of Padang

Jl. Prof. Dr. Hamka Air Tawar Padang, 25131, Telp. (0751) 444648, Indonesia

devniprimasari@yahoo.co.id

Abstract

In multiple life insurance, there are two terms based on the status of the death of the insured is a collection of joint life and last survivor. The difference is in the status of multiple life insurance is the timing of cash coverage. A status is said to be a joint life insurance money if provision was made during the first die and life survivor status if the provision of insurance money made at the time are all dead. To get the sum insured, the insured must pay a premium. If you want to convert into a single premium be regular premium, annuity required. For the last survivor insurance cases we will use the last survivor annuity. The end result of the research process will generate mathematical formulas of present value due annuity and immediate annuity for the case of two and three people in the last survivor status.

Keywords: *Annuity, last survivor annuity, multiple life*

Abstrak

Pada asuransi *multiple life*, terdapat dua istilah berdasarkan status kematian dari kumpulan tertanggung yaitu *joint life* dan *last survivor*. Perbedaan status *multiple life* ini pada asuransi adalah waktu pemberian uang pertanggungan. Suatu status dikatakan *joint life* jika pemberian uang pertanggungan dilakukan pada saat orang pertama meninggal dan status dikatakan *life survivor* jika pemberian uang pertanggungan dilakukan pada saat semuanya telah meninggal. Untuk mendapatkan uang pertanggungan, tertanggung haruslah membayarkan sejumlah premi. Jika ingin mengkonversikan premi tunggal menjadi premi berkala diperlukan anuitas. Untuk kasus asuransi *last survivor* kita akan menggunakan anuitas *last survivor*. Hasil akhir dari proses penelitian penulis akan menghasilkan rumusan matematika nilai sekarang anuitas awal dan anuitas akhir untuk kasus dua orang dan tiga orang pada status *last survivor*.

Keywords: *Anuitas, anuitas last survivor, multiple life*

PENDAHULUAN

Asuransi jiwa tidak hanya menyediakan perlindungan tertanggung untuk satu orang saja (*single life*), namun juga menyediakan perlindungan untuk dua orang atau lebih (*multiple life*). Keuntungan dari asuransi jiwa untuk *multiple life* adalah jumlah tertanggung yang diberikan jaminan lebih banyak pada satu polis kesepakatan, dan penghematan dalam hal biaya baik biaya administrasi maupun biaya pemasaran. Contoh asuransi *multiple life* yaitu asuransi jiwa pasangan yang merupakan produk dari asuransi jiwa seumur hidup.

Pada asuransi *multiple life*, terdapat dua istilah berdasarkan status kematian dari kumpulan tertanggung yaitu *joint life* dan *last survivor* (Bowers, 1997: 263-268). Perbedaan

status *multiple life* ini pada asuransi adalah waktu pemberian uang pertanggungsnya, apakah dilakukan pada saat orang pertama meninggal atau saat keduanya telah meninggal. Di Amerika Serikat, asuransi jiwa pasangan berdasarkan status *joint life* dan *last survivor* disebut juga *first-to-die insurance* dan *second-to-die insurance*.

Untuk mendapatkan uang pertanggungan seperti yang dijanjikan dalam polis asuransi, tertanggung haruslah membayarkan sejumlah premi yaitu sejumlah uang yang wajib dibayar oleh tertanggung kepada pihak penanggung setiap jangka waktu tertentu. Pembayaran premi dari suatu polis asuransi jiwa dapat dibayarkan secara tunggal (sekaligus) atau berkala. Untuk pembayaran secara berkala berupa pembayaran bulanan, triwulanan, kuartalan, semesteran atau tahunan (Achdijat, 1993:86).

Pembayaran premi tunggal jarang dilakukan dikarenakan besarnya uang yang harus dibayarkan untuk sekali bayar. Biasanya premi tunggal dikonversikan menjadi premi berkala, umumnya tahunan (Achdijat, 1993:82). Untuk mengkonversikan premi tunggal menjadi premi berkala diperlukan suatu cicilan pembayaran yang dinamakan dengan anuitas. Anuitas yang digunakan pada asuransi jiwa ini adalah anuitas hidup dikarenakan pembayaran dilakukan bergantung hidup matinya seseorang dimana pembayaran akan berhenti jika yang bersangkutan meninggal.

Pembayaran anuitas dapat dilakukan pada awal periode dan dapat pula dilakukan pada akhir periode. Jika pembayaran terjadi pada akhir setiap periode, disebut sebagai anuitas akhir (*immediate annuity*). Sebaliknya, jika pembayaran terjadi pada awal setiap periode, disebut sebagai anuitas awal (*due annuity*). Selain perbedaan waktu penerimaan atau pembayaran, kedua jenis anuitas tersebut juga dibedakan dengan sedikit modifikasi rumus. Seperti pada kasus asuransi *last survivor* kita akan menggunakan anuitas *last survivor*. Anuitas ini nantinya akan digunakan untuk mengkonversi premi tunggal menjadi premi tahunan pada asuransi *last survivor*. Suatu status dikatakan *last survivor* jika setidaknya satu orang dari kumpulan tersebut masih hidup dan status *last survivor* akan gagal jika terjadi kematian terakhir pada kumpulan tersebut.

METODE

Penelitian yang dilakukan merupakan penelitian dasar (teoritis), dengan menganalisis teori-teori yang relevan terhadap permasalahan yang dibahas berdasarkan pada kajian kepustakaan. Dalam meninjau permasalahan yang dihadapi, langkah kerja yang dilakukan adalah mengumpulkan dan mengaitkan teori-teori yang relevan dengan permasalahan penentuan anuitas *last survivor*.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1.1. Probabilitas pada *Last Survivor*

Berikut di antara (x) dan (y) salah satu diantaranya masih hidup (termasuk kelompok bagian atau kelompok utama) dan tabel yang dipergunakan adalah jumlah yang hidup pada *life table* yang sederhana, apabila keduanya meninggal digunakan yang meninggal pada *life table* yang sederhana, nilai-nilai kemungkinan adalah sebagai berikut:

1. Nilai kemungkinan dalam t tahun (x) dan (y) meninggal

$${}_tq_{\overline{xy}} = {}_tq_x {}_tq_y = (1 - {}_tp_x)(1 - {}_tp_y) \quad (1)$$

Untuk $t = 1$

$$q_{\overline{xy}} = (1 - p_x)(1 - p_y) \quad (2)$$

2. Nilai kemungkinan dalam t tahun sedikitnya 1 orang di antara (x) dan (y) tetap hidup

$${}_tp_{\overline{xy}} = 1 - {}_tq_{\overline{xy}} = 1 - (1 - {}_tp_x)(1 - {}_tp_y) \quad (3)$$

$$= {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{xy}$$

Untuk $t = 1$

$$p_{\overline{xy}} = p_x + p_y - p_{xy} \quad (4)$$

Karena ${}_tp_{\overline{xy}} + {}_tq_{\overline{xy}} = 1$, maka tidak menyebabkan ${}_{s+t}p_{\overline{xy}} = {}_sp_{\overline{xy}} {}_tp_{\overline{x+s,y+s}}$

Apabila diartikan

$$p_{\overline{xy}} = p_x q_y + q_x p_y + p_{xy} \quad (5)$$

3. Nilai kemungkinan mati dalam jangka waktu $[t, t + 1]$ untuk (x) dan (y) mati, yaitu dalam jangka waktu $[t, t + 1]$ nilai kemungkinan kedua-duanya meninggal

$${}_t|q_{\overline{xy}} = {}_tp_{\overline{xy}} - {}_{t+1}p_{\overline{xy}} \quad (6)$$

$$= {}_t|q_x + {}_t|q_y - {}_t|q_{xy} \quad (7)$$

Similar dengan (7),

$${}_tq_{\overline{xy}} = {}_tq_x + {}_tq_y - {}_tq_{xy} \quad (8)$$

Berikut ini bukan merupakan gabungan dua orang melainkan (x) , (y) dan (z) sebanyak tiga orang, caranya mirip dengan yang dua orang. Untuk memudahkan tiga orang tersebut menggunakan tabel mortalita yang sama, seperti berikut:

1. Nilai kemungkinan (x) , (y) dan (z) dalam jangka waktu t tahun meninggal semua adalah

$${}_tq_{\overline{xyz}} = {}_tq_x {}_tq_y {}_tq_z$$

$$= (1 - {}_t p_x)(1 - {}_t p_y)(1 - {}_t p_z) \quad (9)$$

Untuk $t = 1$

$$q_{\overline{xyz}} = (1 - p_x)(1 - p_y)(1 - p_z) \quad (10)$$

2. Nilai kemungkinan (x) , (y) dan (z) t tahun kemudian sedikitnya satu yang hidup adalah

$$\begin{aligned} {}_t p_{\overline{xyz}} &= 1 - {}_t q_{\overline{xyz}} \\ &= 1 - (1 - {}_t p_x)(1 - {}_t p_y)(1 - {}_t p_z) \end{aligned} \quad (11)$$

Untuk $t = 1$

$$p_{\overline{xyz}} = 1 - (1 - p_x)(1 - p_y)(1 - p_z) \quad (12)$$

3. Nilai kemungkinan (x) , (y) dan (z) yang paling akhir hidup dalam $[t, t + 1]$ mati adalah

$${}_t | q_{\overline{xyz}} = {}_t p_{\overline{xyz}} - {}_{t+1} p_{\overline{xyz}} \quad (13)$$

1.2. Simbol-simbol Komutasi Gabungan

Langkah selanjutnya dalam pembuatan tabel mortalitas gabungan adalah menentukan simbol-simbol komutasi gabungan. Simbol komutasi adalah nilai-nilai yang dibuat oleh seseorang yang berguna untuk memudahkan perhitungan dalam table mortalitas. Simbol komutasi ini biasa digunakan untuk perhitungan nilai asuransi yang lain, misalnya anuitas, premi tahunan, dan sebagainya.

Simbol-simbol komutasi pada asuransi *joint life* didefinisikan secara analog dengan simbol-simbol komutasi pada asuransi jiwa tunggal, yaitu didefinisikan sebagai berikut (Jordan, 1991: 194)

$$D_{x_1 x_2 \dots x_m} = v^{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{m}} \cdot l_{x_1 x_2 \dots x_m}$$

maka

$$C_{x_1 x_2 \dots x_m} = v^{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{m} + 1} \cdot d_{x_1 x_2 \dots x_m}$$

Selain itu, terdapat pula beberapa simbol komutasi gabungan pada tabel mortalitas gabungan, yaitu (Futami, 1994: 76)

$$\begin{aligned} N_{xy} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} D_{x+i:y+j} \\ &= D_{xy} + D_{x+1:y+1} + D_{x+2:y+2} + \dots \end{aligned}$$

$$M_{xy} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_{x+i:y+j}$$

$$= C_{xy} + C_{x+1:y+1} + C_{x+2:y+2} + \dots$$

dengan:

$v = (1 + i)^{-1}$, dimana i merupakan tingkat bunga tiap tahun

l_{xy} = fungsi hidup gabungan dua orang berusia x dan y tahun

d_{xy} = banyaknya orang berusia x dan y tahun yang meninggal dalam satu tahun

D_{xy} = simbol komutasi yang menyatakan hasil perkalian dari faktor diskon pangkat rata-rata usia x dan y tahun dengan fungsi hidup gabungan

N_{xy} = simbol komutasi yang menyatakan jumlahan dari $D_{x+i:y+i}$ dengan $i = 0$ sampai dengan usia tertinggi

C_{xy} = simbol komutasi yang menyatakan hasil perkalian dari faktor diskon pangkat rata-rata usia x dan y tahun ditambah 1 dengan banyaknya orang berusia x dan y tahun yang meninggal dalam satu tahun

M_{xy} = simbol komutasi yang menyatakan jumlahan dari $C_{x+i:y+i}$ dengan $i = 0$ sampai dengan usia tertinggi

Simbol-simbol tersebut akan sering digunakan untuk memudahkan perhitungan anuitas.

1.3. Anuitas *Last Survivor* Berjangka untuk Dua Orang

Nilai sekarang anuitas awal *last survivor* berjangka dapat dinyatakan sebagai:

$$\ddot{a}_{\overline{xy:n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_t p_{\overline{xy}} \quad (14)$$

bentuk ${}_t p_{\overline{xy}}$ dapat diubah berdasarkan hubungan pada persamaan (8) sehingga

$$\ddot{a}_{\overline{xy:n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t ({}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_{xy})$$

dengan asumsi peluang (x) dan (y) akan tetap hidup selama t tahun adalah saling bebas (Catarya, 2008), dimana

$${}_t p_{xy} = {}_t p_x \cdot {}_t p_y$$

maka persamaan diatas menjadi :

$$\ddot{a}_{\overline{xy:n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t ({}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_x {}_t p_y)$$

karena nilai $v = \frac{1}{1+i}$ sehingga

$$\ddot{a}_{\overline{xy:n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} \left(\frac{1}{1+i} \right)^t ({}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_x {}_t p_y)$$

$$\ddot{a}_{\overline{xy:n}|} = \ddot{a}_{\overline{x:n}|} + \ddot{a}_{\overline{y:n}|} - \ddot{a}_{\overline{xy:n}|} \quad (15)$$

Untuk nilai sekarang anuitas akhir *last survivor* berjangka dapat dinyatakan sebagai :

$$a_{\overline{xy:n}|} = \sum_{k=1}^n v^k {}_k p_{\overline{xy}} \quad (16)$$

Sehingga,

$$a_{\overline{xy:n}|} = \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{1+i} \right)^t ({}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_x {}_t p_y)$$

$$a_{\overline{xy:n}|} = a_{\overline{x:n}|} + a_{\overline{y:n}|} - a_{\overline{xy:n}|} \quad (17)$$

1.4. Anuitas *Last Survivor* Berjangka untuk Tiga Orang

Nilai sekarang anuitas awal *last survivor* berjangka yang terdiri dari tiga orang adalah :

$$\ddot{a}_{\overline{xyz:n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_t p_{\overline{xyz}} \quad (18)$$

bentuk ${}_t p_{\overline{xyz}}$ dapat diubah berdasarkan hubungan pada persamaan (11) sehingga

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{\overline{xyz:n}|} &= \sum_{t=0}^{n-1} v^t [1 - (1 - {}_t p_x)(1 - {}_t p_y)(1 - {}_t p_z)] \\ &= \sum_{t=0}^{n-1} v^t [1 - (1 - {}_t p_x - {}_t p_y + {}_t p_{xy})(1 - {}_t p_z)] \\ &= \sum_{t=0}^{n-1} v^t [1 - (1 - {}_t p_x - {}_t p_y + {}_t p_x {}_t p_y)(1 - {}_t p_z)] \\ \ddot{a}_{\overline{xyz:n}|} &= \sum_{t=0}^{n-1} v^t ({}_t p_x + {}_t p_y + {}_t p_z \\ &\quad - {}_t p_x {}_t p_y - {}_t p_x {}_t p_z - {}_t p_y {}_t p_z + {}_t p_x {}_t p_y {}_t p_z) \\ \ddot{a}_{\overline{xyz:n}|} &= \ddot{a}_{\overline{x:n}|} + \ddot{a}_{\overline{y:n}|} + \ddot{a}_{\overline{z:n}|} - \ddot{a}_{\overline{xy:n}|} - \ddot{a}_{\overline{xz:n}|} - \ddot{a}_{\overline{yz:n}|} + \ddot{a}_{\overline{xyz:n}|} \end{aligned} \quad (19)$$

Nilai sekarang anuitas akhir *last survivor* berjangka yang terdiri dari tiga orang adalah

$$a_{\overline{xyz:n}|} = \sum_{t=1}^n v^t {}_t p_{\overline{xyz}} \quad (20)$$

Similar dengan proses pada anuitas awal *last survivor* berjangka yang terdiri dari tiga orang, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} a_{\overline{xyz:n}|} &= \sum_{t=1}^n v^t ({}_t p_x + {}_t p_y + {}_t p_z \\ &\quad - {}_t p_x {}_t p_y - {}_t p_x {}_t p_z - {}_t p_y {}_t p_z + {}_t p_x {}_t p_y {}_t p_z) \\ a_{\overline{xyz:n}|} &= a_{\overline{x:n}|} + a_{\overline{y:n}|} + a_{\overline{z:n}|} - a_{\overline{xy:n}|} - a_{\overline{xz:n}|} - a_{\overline{yz:n}|} + a_{\overline{xyz:n}|} \end{aligned} \quad (21)$$

1.5. Contoh Penerapan Teori

Dengan menggunakan tabel mortalita Indonesia tahun 1993 dengan tingkat bunga 5,5%, hitunglah nilai sekarang dari anuitas $a_{\overline{30,35,40:10}|}$!

$$\begin{aligned} a_{\overline{30,35,40:10}|} &= a_{\overline{30:10}|} + a_{\overline{35:10}|} + a_{\overline{40:10}|} - a_{\overline{30,35:10}|} - a_{\overline{30,40:10}|} - a_{\overline{35,40:10}|} + a_{\overline{30,35,40:10}|} \\ &= \sum_{t=1}^{10} v^t ({}_t p_{30} + {}_t p_{35} + {}_t p_{40} \\ &\quad - {}_t p_{30} {}_t p_{35} - {}_t p_{30} {}_t p_{40} - {}_t p_{35} {}_t p_{40} + {}_t p_{30} {}_t p_{35} {}_t p_{40}) \\ &= 7.49999 + 7.4839 + 7.45396 - 7.44664 - 7.41691 - 7.40109 + 7.36443 \\ a_{\overline{30,35,40:10}|} &= 7.53764 \end{aligned}$$

KESIMPULAN

Dari pembahasan yang telah dilakukan dapat disimpulkan bahwa:

- 1) Anuitas *Last Survivor* Berjangka untuk Dua Orang

Nilai sekarang anuitas awal *last survivor* berjangka dapat dinyatakan sebagai:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{\overline{xy:n}|} &= \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_t p_{\overline{xy}} \\ &= \ddot{a}_{\overline{xy:n}|} = \ddot{a}_{\overline{x:n}|} + \ddot{a}_{\overline{y:n}|} - \ddot{a}_{\overline{xy:n}|} \end{aligned}$$

Untuk nilai sekarang anuitas akhir *last survivor* berjangka dapat dinyatakan sebagai :

$$\begin{aligned} a_{\overline{xy:n}|} &= \sum_{k=1}^n v^k {}_k p_{\overline{xy}} \\ &= a_{\overline{xy:n}|} = a_{\overline{x:n}|} + a_{\overline{y:n}|} - a_{\overline{xy:n}|} \end{aligned}$$

2) Anuitas Last Survivor Berjangka untuk Tiga Orang

Nilai sekarang anuitas awal *last survivor* berjangka yang terdiri dari tiga orang adalah

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{\overline{xyz:n}|} &= \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_t p_{\overline{xyz}} \\ &= \ddot{a}_{\overline{x:n}|} + \ddot{a}_{\overline{y:n}|} + \ddot{a}_{\overline{z:n}|} - \ddot{a}_{\overline{xy:n}|} - \ddot{a}_{\overline{xz:n}|} - \ddot{a}_{\overline{yz:n}|} + \ddot{a}_{\overline{xyz:n}|}\end{aligned}$$

Nilai sekarang anuitas akhir *last survivor* berjangka yang terdiri dari tiga orang adalah

$$\begin{aligned}a_{\overline{xyz:n}|} &= \sum_{t=1}^n v^t {}_t p_{\overline{xyz}} \\ &= a_{\overline{x:n}|} + a_{\overline{y:n}|} + a_{\overline{z:n}|} - a_{\overline{xy:n}|} - a_{\overline{xz:n}|} - a_{\overline{yz:n}|} + a_{\overline{xyz:n}|}\end{aligned}$$

REFERENSI

- Achdijat, Didi. (1993). *Teknik Pengelolaan Asuransi Jiwa*. Yogyakarta : Gunadarma.
- Bowers, Newton L. et al. (1997). *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries.
- Catarya, Indra. (2008). *Asuransi II*. Jakarta: Universitas Terbuka.
- Futami, Takashi. (1993). *Matematika Asuransi Jiwa Bagian I*. Jakarta : Rekaprint Utama.
- Futami, Takashi. (1994). *Matematika Asuransi Jiwa Bagian II*. Jakarta : Rekaprint Utama.
- Jordan, Chester Wallace.(1991). *Society of Actuaries' Textbook on Life Contingencies*. Massachusetts: The Society of Actuaries.
- Ningsih,Widya. (2014). *Penentuan Premi Bersih Tahunan pada Asuransi Jiwa Seumur Hidup untuk Kasus Multiple Life*. Jurusan Matematika :Universitas Negeri Padang.
- Sugihar, Ayulina. (2011).*Perhitungan Premi Tahunan pada Asuransi Joint Life dan Penerapannya*. Jurusan Pendidikan Matematika :Universitas Negeri Yogyakarta.